
Exercice 1. Puisque μ_A est scindé avec des racines simples, on sait que A est diagonalisable. De plus les valeurs propres sont 0 et 3, car les racines de χ_A sont les mêmes que celles de μ_A.

Comme A est de rang 1, le noyau de A doit être de dimension 2 (par le théorème du rang). En d'autres termes, l'espace propre E_0 pour la valeur propre 0 est de dimension 2. Comme $\mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_3$ (car A est diagonalisable), l'autre espace propre E_3 doit être de dimension 1. En prenant une base de chacun des deux espaces propres, on obtient que la matrice A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.
a) La réponse est positive. Il est clair que le polynôme caractéristique de $J_n(\lambda)$ vaut $\chi_J = (-1)^n(X-\lambda)^n$. En particulier le polynôme minimal est une puissance de $(X-\lambda)$. Or $(X-\lambda)^n$ est un polynôme annulateur de J, mais $(X-\lambda)^{n-1}$ ne l'est pas, donc on a aussi $\mu_J = (X-\lambda)^n$.
b) Non. Par exemple, la matrice $\lambda\,\mathrm{I}_n$ ne possède une seule valeur propre et elle a n blocs de Jordan $J_1(\lambda)$.

Exercice 3. Le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente A de taille 4×4 est le polynôme $\chi = X^4$. Il est scindé et donc A est semblable à sa forme normale de Jordan et deux formes normales qui ne sont pas égales à l'ordre des blocs de Jordan ne sont pas des matrices semblables. Chaque bloc de Jordan est lui-même un bloc de Jordan nilpotent $J_m(0)$. La classe de similitude de A est donc uniquement déterminée par la taille des différents blocs de Jordan nilpotents. Il y a 5 façons de partitionner 4 en somme d'entiers naturels :

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1.$$

Il y a donc 5 types de matrice nilpotente de taille 4×4 à similitude près, qui sont :

- un bloc de taille 4 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- un bloc de taille 3 et un bloc de taille 1 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
- deux blocs de taille 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- un bloc de taille 2 et deux blocs de taille 1 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
- quatre blocs de taille 1 : $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

avec des zéros dans toutes les cases laissées vides en dehors des blocs.

Remarque.

Le même raisonnement nous dit qu'il y a 7 classes de similitudes de matrices nilpotentes de taille 5×5 car il y a 7 partition de 5 en somme d'entiers positifs :

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

De même il y a 11 classes de similitudes de matrices nilpotentes de taille 6×6 et 15 classes dans le cas 7×7. Pour les matrices de taille $n \times n$, ce nombre est le nombre de partition de n en somme d'entiers positifs. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Partition_d%27un_entier` pour une discussion.

Exercice 4. (a) La condition pour que $J_m(\lambda)$ soit un bloc de Jordan est que la matrice a des coefficients diagonaux égaux à λ et qu'à partir de la deuxième colonne il y a un 1 au dessus du terme diagonal. Si $m = 1$, il n'existe pas de deuxième colonne, donc pas de conditions à satisfaire. Noter que $J_1(\lambda) = (\lambda)$ (la matrice de taille 1×1 de valeur λ).

Ainsi une matrice diagonale n'est rien d'autre qu'une forme normale de Jordan dont chaque bloc est de taille 1.

(b) Un bloc de Jordan $J_m(\lambda)$ n'a qu'une valeur propre qui est λ. On a $\chi_{J_m(\lambda)} = \mu_{J_m(\lambda)} = (-1)^m(X - \lambda)^m$.

(c) Voici la liste complète suivante de formes normales de Jordan de taille ≤ 4

1. Si $n = 1$ la seule forme possible est $A_1 = J_1(\alpha) = (\alpha)$ (toute matrice de taille 1×1 est un bloc de Jordan).
2. Si $n = 2$, on a les formes de Jordan possibles $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
3. Si $n = 3$, on a les formes de Jordan possibles suivantes

$$A_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

4. Si $n = 4$ on a les formes de Jordan possibles suivantes

$$A_7 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Voyons maintenant les polynômes caractéristiques et minimaux de ces matrices :

1. Pour la matrice A_1 on a $\chi_{A_1} = \mu_{A_1} = (X - \alpha)$.
2. Pour la matrice diagonale A_2 on a $\chi_{A_2} = (X - \alpha)(X - \beta)$. Si $\alpha \neq \beta$, alors on a aussi $\mu_{A_2} = (X - \alpha)(X - \beta)$ et si $\alpha = \beta$, alors $\mu_{A_2} = (X - \alpha)$.

   Pour la matrice A_3, on a $\chi_{A_3} = \mu_{A_3} = (X - \alpha)^2$.
3. Pour la matrice diagonale A_4, on a $\chi_{A_4} = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ et le polynôme minimal est scindé à racines simples. Si les valeurs propres α, β, γ sont deux-à-deux distinctes, alors on a aussi $\mu_{A_4} = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. Si exactement deux valeurs propres sont égales, disons $\gamma = \beta \neq \alpha$, alors $\mu_{A_4} = (X - \alpha)(X - \beta)$ et si $\gamma = \beta = \alpha$, alors $\mu_{A_4} = (X - \alpha)$.

   Pour la matrice A_5, on a $\chi_{A_5} = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ et le polynôme minimal est $\mu_{A_5} = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ si $\alpha \neq \beta$ et $\mu_{A_5} = (X - \beta)^2$ si $\alpha = \beta$.

   Pour la matrice A_6, on a $\chi_{A_6} = \mu_{A_6} = (X - \alpha)^3$.
4. Pour la matrice diagonale A_7, on a $\chi_{A_7} = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta)$ et le polynôme minimal est le polynôme à racines simples parmi $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (donc ce polynôme χ_{A_7} dépend des répétitions possibles parmi ces valeurs).

   Pour la matrice A_8, on a $\chi_{A_8} = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)^2$ et le polynôme minimal est l'un des suivants, selon que certaines valeurs propres se répètent :

$$\begin{aligned} &\mu_{A_8} = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)^2 \quad && \mu_{A_8} = (X - \alpha)(X - \gamma)^2, \\ &\mu_{A_8} = (X - \beta)(X - \gamma)^2, && \mu_{A_8} = (X - \gamma)^2. \end{aligned}$$

   Pour la matrice A_9, on a $\chi_{A_9} = (X - \alpha)(X - \beta)^3$ et le polynôme minimal est $\mu_{A_9} = (X - \alpha)(X - \beta)^3$ si $\alpha \neq \beta$ et $\mu_{A_9} = (X - \beta)^3$ si $\alpha = \beta$.

   Pour la matrice A_{10}, on a $\chi_{A_{10}} = \mu_{A_{10}} = (X - \alpha)^4$.

   Finalement pour la matrice A_{11}, on a $\chi_{A_{11}} = (X - \alpha)^2(X - \gamma)^2$, et $\mu_{A_{11}} = (X - \alpha)^2(X - \gamma)^2$ si $\alpha \neq \gamma$ et $\mu_{A_{11}} = (X - \alpha)^2$ si $\alpha = \gamma$.

(d) Montrons d'abord que deux matrices $A, B \in M_n(K)$ qui admettent la même forme normale de Jordan (i.e. $J[A] = J[B]$) sont semblables (nous n'avons pas besoin de supposer que $n \leq 3$). Nos hypothèses impliquent qu'il existe des matrices inversibles $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ telles que

$$P^{-1}AP = J[A] = J[B] = Q^{-1}BQ.$$

Alors A et B sont semblables car $B = QP^{-1}APQ^{-1} = S^{-1}AS$ où on a posé $S = PQ^{-1}$.

Inversement, supposons que A et B soient semblables et montrons qu'elles doivent avoir la même forme de Jordan. On suppose pour cet exercice que $n \leq 3$ et on se contente de considérer le cas $n = 3$ (le cas $n = 2$ est semblable et le cas $n = 1$ est trivial). On raisonne par contraposition, il s'agit donc de prouver que si A et B n'ont pas la même forme de Jordan, alors ces matrices ne peuvent pas être semblables, ce qui nous ramène à prouver que *deux formes de Jordan différentes ne peuvent pas être des matrices semblables.* Il suffit alors de considérer les matrices types A_4, A_5 et A_6 de notre liste. Or ces matrices ont des polynômes minimaux différents (toutes les racines sont simples pour A_4, il y a une racine double pour A_5 et une racine triple pour A_6), donc ces matrices ne peuvent pas êtres semblables.

L'affirmation en (d) est vraie pour tout n, mais le raisonnement ne peut pas s'appuyer uniquement sur l'étude des polynômes minimaux et caractéristiques. Par exemple si $\alpha = \beta = \gamma$, alors les matrices A_8 et A_{11} ont le même polynôme minimal $\mu = (X-\alpha)^2$. Elles ne sont pourtant pas semblables, ce qui se voit en comparant les multiplicités géométriques de la valeur propre α pour les deux matrices.

Pour le cas général, on renvoie au Théorème 9.12.9.

Exercice 5.

(a) On peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices ont le même polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$, mais $\chi_A = (X-1)^3(X-2)$ et $\chi_B = (X-1)^2(X-2)^2$. Ces matrices ne peuvent pas être semblables (car deux matrices qui n'ont pas le même polynôme caractéristique ne sont jamais semblables).

(b) Par exemple

$$C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces matrices ne sont pas semblables car C n'est pas diagonalisable et D est diagonale.

Exercice 6. (a) L'endomorphisme n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal possède une racine double.

(b) On sait que $\dim(V) = 4$ car $\deg \chi = 4$ et que f n'a qu'une valeur propre $\lambda = 2$. On sait aussi $(f - \lambda \operatorname{Id}_V)$ est nilpotent d'ordre 2 car $\mu_f = (X-2)^2$. Donc la forme normale de Jordan de f peut ou bien contenir deux blocs de Jordan $J_2(2)$ ou un bloc $J_2(2)$ et deux blocs $J_1(2)$.

Les formes normales de Jordan sont donc (à permutation près des blocs de Jordan)

$$J_2(2) \oplus J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{si } \mathrm{multgeom}_2(f) = 2)$$

et

$$J_2(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{si } \mathrm{multgeom}_2(f) = 3)$$

Exercice 7. On prend les matrices une par une :
• Le polynôme caractéristique de H est $\chi_H = X^2 - 18\,X + 81 = (X-9)^2$. Il n'y a donc qu'une seule valeur propre, $\lambda = 9$. La matrice

$$H - 9\,\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est non nulle, donc le polynôme spectral $\nu_H = (X-9)$ n'est pas un polynôme annulateur de H. Par conséquent la matrice H est non diagonalisable, son polynôme minimal est $\mu_H = (X-9)^2$, et sa forme canonique de Jordan est

$$J[H] = J_2(9) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver une base de Jordan, on commence par chercher un vecteur X_2 qui appartient à $\operatorname{Ker}\left((H - 9\,\mathrm{I}_2)^2\right) \setminus \operatorname{Ker}(H - 9\,\mathrm{I}_2)$. Par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis on pose $X_1 = (H - 9\,\mathrm{I}_2)X_2$ et on forme la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs X_1 et X_2. On a donc

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et on vérifie par calcul que

$$P^{-1}HP = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = J_2(9).$$

Remarque : on peut économiser le calcul de P^{-1} et vérifier que $HP = PJ_2(9) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ (ce qui peut être intéressant pour des matrices P plus compliquées).

• La matrice F est la matrice de Fibonnaci. Son polynôme caractéristique $\chi_F = X^2 - X - 1$ est scindé, à racines simples $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La matrice F est donc diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$ et sa forme normale de Jordan n'est rien d'autre que sa forme diagonale :

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. On prend à nouveau les matrices une par une :
• Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^3$, donc A est nilpotente (par Cayley-Hamilton). D'autre part on a $A^2 \neq 0$, en effet

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

donc A est nilpotente et son rang est égal à 2, par conséquent sa forme normale de Jordan est $J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour trouver une base de Jordan on cherche un vecteur engendrant un cycle d'ordre 3 : on peut prendre n'importe quel vecteur X tel que $A^2X \neq 0$. Choisissons (par exemple) $X = X_3 = (0, 0, 1)$, puis

$$X = X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = AX_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = AX_2 = A^2X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors $\{X_1, X_2, X_3\}$ est une base de Jordan (observer comment on numérote les vecteurs). Soit P la matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que $AP = PJ$ (et donc $J = P^{-1}AP$).

• Le polynôme caractéristique de B est

$$\chi_B = -(X^3 - 5\,X^2 + 8\,X - 4) = -(X-1)(X-2)^2.$$

En particulier ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$ et le spectre de B est $\sigma(B) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}$, avec les multiplicités algébriques respectives 1 et 2. La décomposition primaire de B est donc donnée par

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_3) \oplus \mathrm{Ker}(B - 2\cdot\mathrm{I}_3)^2.$$

La matrice $(B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et son noyau est donc de dimension 1. Cela signifie que la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda = 2$ vaut 1. On a donc

$$\mathrm{multgeom}_2(B) = 1 < 2 = \mathrm{multalg}_2(B),$$

et la forme normale de Jordan est donc $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(On peut aussi arriver à cette conclusion en vérifiant que le polynôme minimal est $\chi_B = \mu_B = (X-1)(X-2)^2$, et que donc B n'est pas diagonalisable).

Pour trouver une base de Jordan, on cherche un vecteur propre X_1 pour la valeur propre $\lambda = 1$. Puis on cherche vecteur Y_2 générant un cycle d'ordre 2 pour la valeur propre $\lambda = 2$, c'est à dire un élément

$$Y_2 \in \mathrm{Ker}(B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3)^2 \setminus \mathrm{Ker}(B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3).$$

Le troisième vecteur de la base de Jordan sera $Y_1 = (B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3)Y_2$ (observer la logique de la numérotation inversée). On trouve après quelques calculs :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_3) \quad \text{et} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3)^2 \setminus \mathrm{Ker}(B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3);$$

puis

$$Y_1 = (B - 2\mathrm{I}_2)\cdot Y_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B - 2{\cdot}\mathrm{I}_3).$$

Maintenant on forme la matrice P dont les trois colonnes sont nos trois vecteurs propres généralisés :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

Alors on trouve en conjuguant B par P :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 20 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(si on ne veut pas calculer P^{-1}, on peut simplement vérifier que $BP = PJ$).

Exercice 9. Rappelons que $\dim \mathscr{P}_m[x] = m + 1$ et que l'opérateur de dérivation est nilpotent d'ordre $m+1$. La seule valeur propre est donc 0 et une base de Jordan ne contient qu'un seul cycle. On cherche donc $m + 1$ polynômes q_k tels que $D(q_k) = q_k'(x) = q_{k-1}$ si $k > 0$ et $D(q_0) = 0$. Une telle base de Jordan est donnée par

$$q_k(x) = \frac{x^k}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, m),$$

c'est-à-dire $q_0(x) = 1, q_1(x) = x, q_2(x) = \frac{x^2}{2}, \ldots, q_m(x) = \frac{x^m}{m!}$. Dans cette base la matrice de D est un bloc de Jordan nilpotent d'ordre $m + 1$.